

تمرين رقم 1

نضع $f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$ لكل z من $\mathbb{C} - \{-1\}$

(1) أ- حدد العدد الحقيقي y بحيث $f(iy) = iy$

ب- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $f(z) = z$: نرسم $z_0 ; z_1 ; z_2$ لحلول المعادلة

حيث $z_0 \in i\mathbb{R}$ و $\text{Re}(z_1) > \text{Re}(z_2)$

(2) أ- تحقق أن $z_1 + 1 = \left[1, \frac{11\pi}{6}\right]$ و $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب- استنتج الشكل المتلثي لكل من العددين $z_2 ; z_1$

(3) نفترض في ما يلي أن $z = e^{i\alpha}$; $0 \leq \alpha < \pi$

أ- بين أن $\overline{f(z)} = izf(z)$

ب- حدد α علما أن $f(z)$ تخيلي صرف

ت- أكتب $f(z)$ على الشكل $re^{i\theta}$ حيث $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

(4) حدد z إذا علمت أن $|z|=1$ و $\text{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}$

تمرين رقم 2

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين العقديين $i ; -i$

(1) أ- تحقق أن العدد $u = a + i$ حل للمعادلة $z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$ (E)

ب- حدد v الحل الثاني للمعادلة (E)

(2) نفترض أن $|a|=1$ - بين أن $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$

ب- تحقق أن $u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i]$

ج- استنتج أن $\arg(u) = \frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4}$ [π]

(3) بين أن $|u| + |v| \geq 2$

تمرين رقم 3

ليكن θ من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

(1) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $z^2 + 2\cos\theta(1 + \cos\theta)z + (1 + \cos\theta)^2 = 0$: و أكتب الحلين على الشكل المتلثي

(2) حدد على الشكل المتلثي $z_2 ; z_1$ الجذرين المربعين للعدد $a = 2\cos^2\frac{\theta}{2}(-\cos\theta + i\sin\theta)$

(3) استنتج الشكل المتلثي ل $z_3 ; z_4$ الجذرين المربعين للعدد \bar{a}

(4) نضع $s_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$ لكل n من \mathbb{N}

بين أن $s_{2p+1} = 0$ و أن $s_{2p} = (-1)^p 2^{p+2} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2p} \cos(p\theta)$

تمرين رقم 4

(1) بين أن $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+) \arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$

(2) بين أن المتتالية $U_n = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$ متقاربة و حدد نهايتها